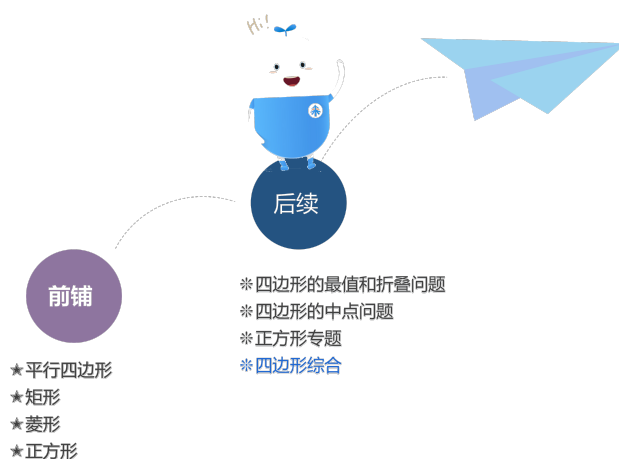
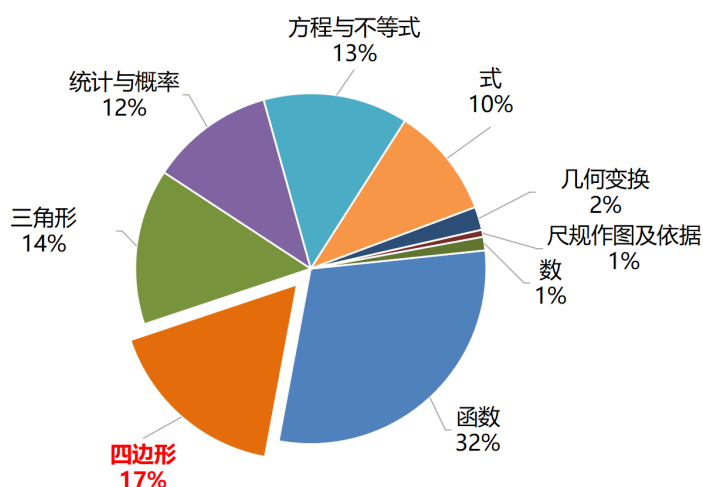


第1讲 四边形存在性问题

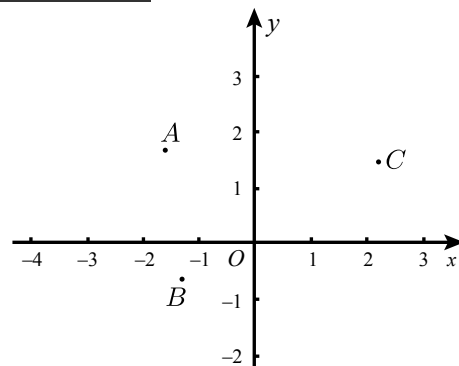
平行四边形属于人教版第十八章的内容，是期中、期末考试的重要知识点，主要考察平行四边形的性质和判定，故这部分我们分为《平行四边形》、《四边形的最值和折叠问题》、《四边形的中点问题》、《正方形专题》、《四边形综合》五个模块。本模块为《四边形综合》，旨在帮助学生学会利用四边形的性质及以往知识解决综合性问题。

本模块难度较大，适用于四边形综合的专项提升，本模块分为四边形存在性问题、四边形中的动点问题2讲内容，帮助学生梳理综合题的解题思路，学会将所学知识进行综合运用。



一、已知三点求第四点坐标

在平面直角坐标系中，平行四边形的顶点 A 、 B 、 C 的坐标分别是 (x_a, y_a) ， (x_b, y_b) ， (x_c, y_c) ，则第四个点 D 的坐标为 $(x_a + x_b - x_c, y_a + y_b - y_c)$ 或 $(x_a + x_c - x_b, y_a + y_c - y_b)$ 或 $(x_b + x_c - x_a, y_b + y_c - y_a)$ 。



【教法备注】

利用平行四边形对角线互相平分的性质及中点坐标公式进行推导

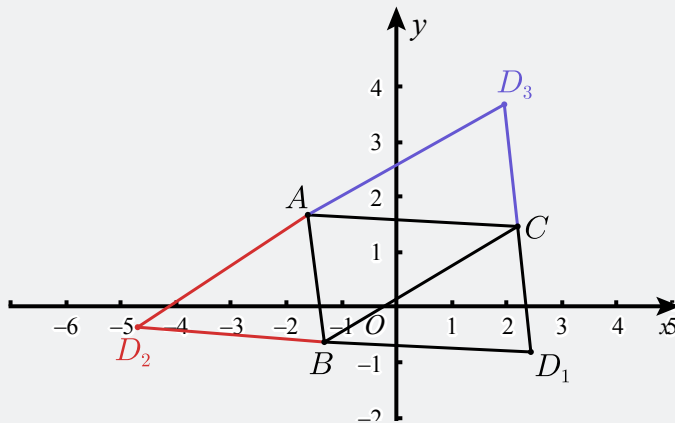
以 D_1 为例，

$\because$ 平行四边形对角线互相平分

$$\therefore \begin{cases} x_a + x_d = x_b + x_c \\ y_a + y_d = y_b + y_c \end{cases}$$

$$\therefore D_1(x_b + x_c - x_a, y_b + y_c - y_a)$$

D_2 、 D_3 同理即可求



注意：

①若题中说平行四边形 $ABCD$ ，则字母要按照顺或逆时针方向排列

②若题中说以 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的平行四边形，则无顺序，需要分类讨论

其它特殊四边形存在性问题，也可先找出平行四边形，然后再利用特殊四边形的性质求解

|| 例题1

1. 在平面直角坐标系中，平行四边形的顶点 A 、 B 、 C 的坐标分别是 $(0, 0)$ ， $(5, 0)$ ， $(2, 3)$ ，则第四个顶点 D 的坐标是 _____。

【答案】 $(-3, 3)$ 或 $(7, 3)$ 或 $(3, -3)$

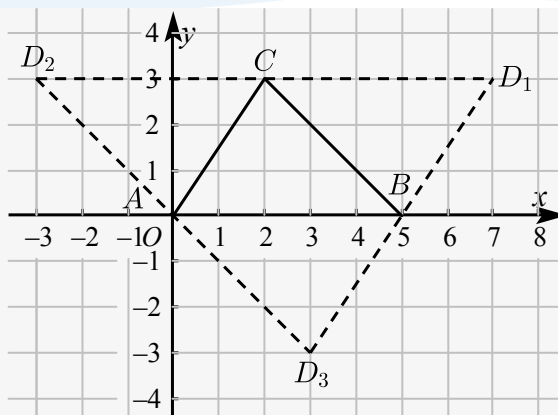
【解析】 如图所示，

① AB 为对角线时，点 D 的坐标为 $(3, -3)$ ，

② BC 为对角线时，点 D 的坐标为 $(7, 3)$ ，

③ AC 为对角线时，点 D 的坐标为 $(-3, 3)$

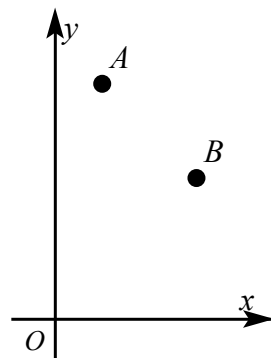
综上所述，点 D 的坐标是 $(7, 3)$ ， $(-3, 3)$ ， $(3, -3)$ 。



【标注】【知识点】平行四边形的存在性

练习1

2. 如图：在平面直角坐标系中， A 、 B 两点的坐标分别为 $(1, 5)$ 、 $(3, 3)$ ， M 、 N 分别是 x 轴、 y 轴上的点．如果以点 A 、 B 、 M 、 N 为顶点的四边形是平行四边形，则 M 的坐标为_____。



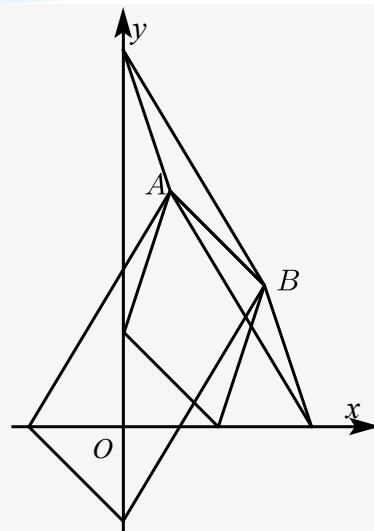
【答案】 $(2, 0)$ ， $(-2, 0)$ ， $(4, 0)$

【解析】如图所示：分三种情况考虑：

(i) 当直线 MN 与 x 轴、 y 轴交于 $M(2, 0)$ 、 $N(0, 2)$ ，此时 $MN = AB = 2\sqrt{2}$ ，且直线 MN 与直线 AB 斜率相同，都为 -1 ，即两直线平行， $\therefore AMNB$ 为平行四边形。

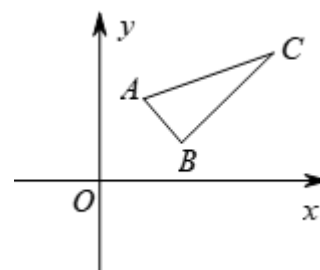
(ii) 当直线与 x 轴、 y 轴分别交于 $M'(-2, 0)$ 、 $N'(0, -2)$ ，此时 $N'M' = AB = 2\sqrt{2}$ ，且直线 $N'M'$ 与直线 AB 斜率相同，都为 -1 ，即两直线平行， $\therefore AM'N'B$ 为平行四边形。

(iii) 直线与 x 轴、 y 轴分别交于 M'' 、 N'' ，直线 $N''M''$ 与直线 AB 交于 C 点，若 C 为 $N''M''$ 与 AB 中点，四边形为平行四边形，此时 C 坐标为 $(2, 4)$ ， $N''(0, 8)$ ， $M''(4, 0)$ 。



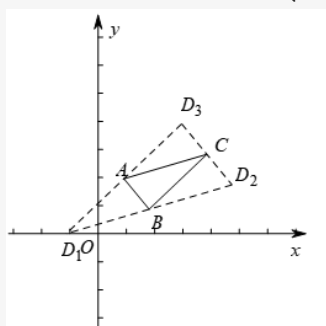
【标注】【知识点】平行四边形的存在性

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(1, 2)$ ， $B(2, 1)$ ， $C(4, 3)$ ，在平面直角坐标系内找一点 D ，使以 A ， B ， C ， D 四点构成一个平行四边形，写出点 D 的坐标．



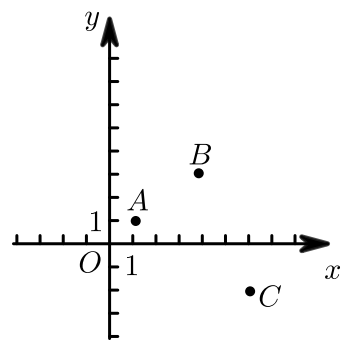
【答案】 $(3, 4)$ 或 $(5, 2)$ 或 $(-1, 0)$ ．

【解析】如图所示，点 D 坐标为 $(3, 4)$ 或 $(5, 2)$ 或 $(-1, 0)$ ．



【标注】【知识点】平行四边形的存在性

4. 已知 $A(1, 1)$ ， $B(4, 3)$ ， $C(6, -2)$ ，在平面直角坐标找一点 D ，使以 A 、 B 、 C 、 D 四点的四边形为平行四边形，则 D 点的坐标是 _____ ．



【答案】 $(9, 0)$, $(-1, 6)$, $(3, -4)$

【解析】 $\because$ 两组对边分别平行的四边形是平行四边形 ,

$\therefore$ 可以分以下三种情况分别求出 D 点的坐标 :

- ① 当 $AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$ 时 , D 点的坐标为 $(9, 0)$;
- ② 当 $AD \parallel BC$, $AC \parallel BD$ 时 , D 点的坐标为 $(-1, 6)$;
- ③ 当 $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ 时 , D 点的坐标为 $(3, -4)$.

故 D 点坐标为 $(9, 0)$ 或 $(-1, 6)$ 或 $(3, -4)$;

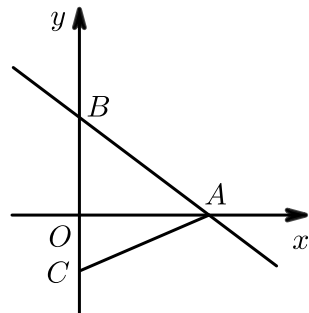
故答案为 : $(9, 0)$ 或 $(-1, 6)$ 或 $(3, -4)$.

【标注】 【知识点】 平行四边形的存在性

二、与平面直角坐标系综合

|| 例题2

5. 如图所示 , 直线 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 与 x 轴、 y 轴交于 A 、 B 两点 , 点 C 是 y 轴负半轴上一点 , $BA = BC$.



- (1) 求 $\triangle ABC$ 的面积和点 C 的坐标 .
- (2) 在平面内是否存在点 P , 使以 P 、 A 、 B 、 C 为顶点的四边形为平行四边形 ? 若存在 , 请直接写出所有的点 P 的坐标 ; 若不存在 , 请说明理由 .

【答案】(1) $\triangle ABC$ 的面积是10. 点C坐标为(0, -2).

(2) 存在, $P(4, 5)$ 或 $(-4, 1)$ 或 $(4, -5)$. 证明见解析.

【解析】(1) 令 $x = 0$ 代入解析式可得: $y = 3$,

令 $y = 0$ 代入解析式可得: $x = 4$,

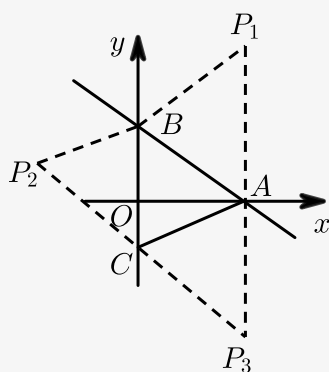
所以 $A(4, 0)$, $B(0, 3)$,

$\because$ 点C是y轴负半轴上一点, $BA = BC$,

$\therefore$ 点C坐标为(0, -2),

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 = $\frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$.

(2) 当AB是对角线时, $AP \parallel BC$, $AP = BC = 5$, $A(4, 0)$,



$\therefore$ 点 $P_1(4, 5)$;

当 $BA \parallel CP$, 且 $BA = CP$ 时,

$\therefore$ 点 $P_2(-4, 1)$;

当AC是对角线时, $AP \parallel BC$, $AP = BC = 5$, $A(4, 0)$,

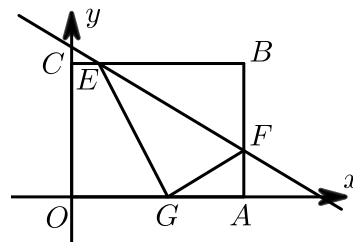
$\therefore$ 点 $P_3(4, -5)$;

$\therefore$ 存在 $P(4, 5)$ 或 $(-4, 1)$ 或 $(4, -5)$, 使以A、B、C、P为顶点的四边形为平行四边形.

【标注】【知识点】平行四边形的存在性

练习2

6. 如图, 四边形OABC为矩形, A点在x轴上, C点在y轴上, 顶点B的坐标为(8, 6), 一次函数 $y = kx + b$ 的图象与BC、AB分别交于点E、F, 将矩形一角沿着直线EF折叠, 点B落在G点. 如图, 若点G在OA上, 且 $AF = 2$.



(1) 求点 G 和点 E 的坐标.

(2) 若点 M 在 y 轴上, 在直线 EF 上是否存在点 N , 使以 M 、 N 、 F 、 G 为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 求 N 点的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $G(8-2\sqrt{3}, 0)$, $E(8-4\sqrt{3}, 6)$.

(2) $N(2\sqrt{3}, \frac{8}{3}\sqrt{3})$ 或 $N(-2\sqrt{3}, 4+8\sqrt{3})$ 或 $N(16-2\sqrt{3}, 4-\frac{8}{3}\sqrt{3})$.

【解析】 (1) $AF = 2$,

$$\therefore CF = BF = 6 - 2 = 4,$$

$$\therefore GA = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore G(8-2\sqrt{3}, 0),$$

$$k_{BG} = \frac{6-0}{8-8+2\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

且 BG 中点 $(8-\sqrt{3}, 3)$ 在直线 EF 上,

$$\text{得: } EF: y-3 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-8+\sqrt{3}),$$

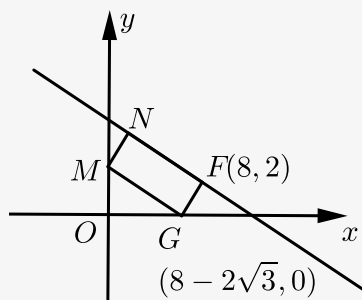
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{8}{3}\sqrt{3} + 2,$$

$$\text{令 } y = 6 \text{ 得 } x = 8 - 4\sqrt{3},$$

$$\therefore E(8-4\sqrt{3}, 6).$$

(2) 设 $M(0, m)$, $N(n, -\frac{\sqrt{3}}{3}n + \frac{8}{3}\sqrt{3} + 2)$.

情况1:

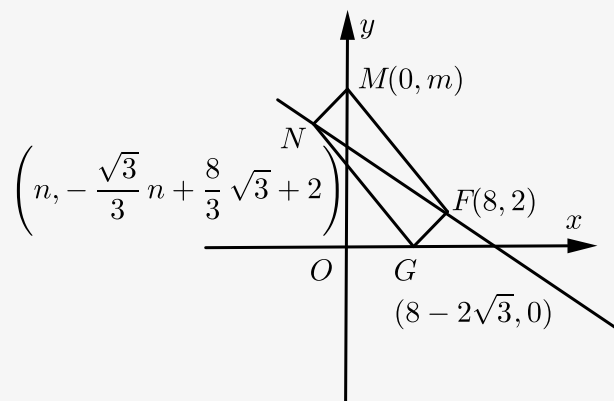


$$\text{有 } \begin{cases} 0+8 = 8-2\sqrt{3}+n \\ m+2 = 0 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}n + \frac{8}{3}\sqrt{3} + 2\right) \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = \frac{8}{3}\sqrt{3} - 2, \\ n = 2\sqrt{3} \end{cases},$$

$$\therefore M\left(0, \frac{8}{3}\sqrt{3} - 2\right), N\left(2\sqrt{3}, \frac{8}{3}\sqrt{3}\right).$$

情况2:

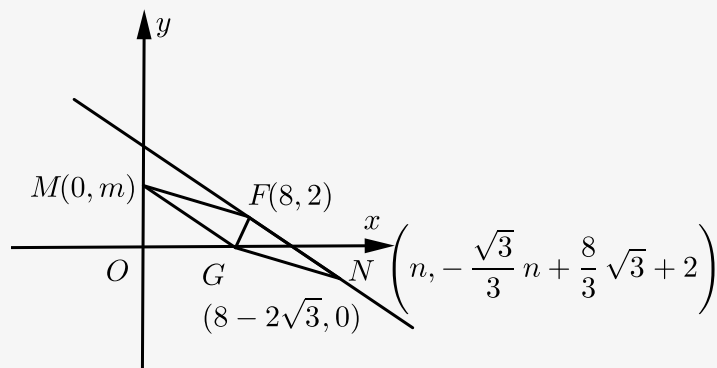


$$\text{有} \begin{cases} 0 + 8 - 2\sqrt{3} = n + 8 \\ m + 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}n + \frac{8}{3}\sqrt{3} + 2 + 2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = 6 + 8\sqrt{3} \\ n = -2\sqrt{3} \end{cases},$$

$$\therefore M(0, 6 + 8\sqrt{3}), N(-2\sqrt{3}, 4 + 8\sqrt{3}).$$

情况3:



$$\text{有} \begin{cases} 0 + n = 8 + 8 - 2\sqrt{3} \\ m + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}n + \frac{8}{3}\sqrt{3} + 2\right) = 2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = \frac{8}{3}\sqrt{3} - 2 \\ n = 16 - 2\sqrt{3} \end{cases},$$

$$\therefore M\left(0, \frac{8}{3}\sqrt{3} - 2\right), N\left(16 - 2\sqrt{3}, 4 - \frac{8}{3}\sqrt{3}\right).$$

综上所述, $N\left(2\sqrt{3}, \frac{8}{3}\sqrt{3}\right)$ 或 $N(-2\sqrt{3}, 4 + 8\sqrt{3})$ 或

$$N\left(16 - 2\sqrt{3}, 4 - \frac{8}{3}\sqrt{3}\right).$$

【标注】【知识点】一次函数与平行四边形

【知识点拨】

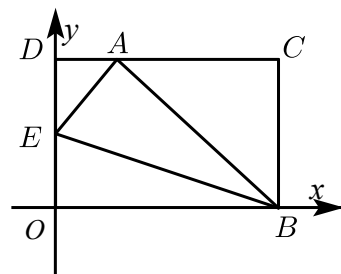
此题第一问可以作 $EM \perp OA$ ，然后利用 $\triangle EMG$ 勾股

|| 例题3

7. 问题情境：

平面直角坐标系中，矩形纸片 $OBCD$ 按如图的方式放置．已知 $OB = 10$ ， $BC = 6$ ，将这张纸片沿过点 B 的直线折叠，使点 O 落在边 CD 上，记作点 A ，折痕与边 OD 交于点 E ．

数学探究：



- (1) 点 C 的坐标为 _____ ．
- (2) 求点 E 的坐标及直线 BE 的函数关系式．
- (3) 若点 P 是 x 轴上的一点，直线 BE 上是否存在点 Q ，能使以 A, B, P, Q 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，直接写出相应的点 Q 的坐标；若不存在，说明理由．

【答案】(1) $(10, 6)$

(2) $E\left(0, \frac{10}{3}\right)$ ，直线 BE 的函数关系式为 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$ ．

(3) 直线 BE 上是存在点 Q ，能使以 A, B, P, Q 为顶点的四边形是平行四边形，点 $Q(-8, 6)$ 或 $(28, -6)$ ．

【解析】(1) $\because$ 四边形 $OBCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle OBC = 90^\circ,$$

$$\because OB = 10, BC = 6,$$

$$\therefore C(10, 6),$$

故答案为： $(10, 6)$ ．

(2) $\because$ 四边形 $OBCD$ 是矩形，

$$\therefore OB = CD = 10, AD = BC = 6, \angle C = \angle ODC = 90^\circ,$$

$$\text{设 } OE = m,$$

$$\therefore DE = OD - OE = 6 - m,$$

$$\text{由折叠知, } AB = OB = 10, AE = OE = m,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 根据勾股定理得, $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 8$,

$$\therefore AD = CD - AC = 10 - 8 = 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, 根据勾股定理得, $AD^2 + DE^2 = AE^2$,

$$\therefore 2^2 + (6 - m)^2 = m^2,$$

$$\therefore m = \frac{10}{3},$$

$$\therefore E\left(0, \frac{10}{3}\right),$$

设直线 BE 的函数关系式为 $y = kx + \frac{10}{3}$,

$$\therefore B(10, 0),$$

$$\therefore 10k + \frac{10}{3} = 0,$$

$$\therefore k = -\frac{1}{3},$$

$\therefore$ 直线 BE 的函数关系式为 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$.

(3) 由(2)知, $AD = 2$,

$$\therefore A(2, 6),$$

$\therefore$ 能使以 A, B, P, Q 为顶点的四边形是平行四边形,

$$\therefore PQ \parallel AB,$$

①当 BQ 为的对角线时,

$$\therefore AQ \parallel BP,$$

$\therefore$ 点 B, P 在 x 轴,

$\therefore Q$ 的纵坐标等于点 A 的纵坐标6,

$\therefore$ 点 Q 在直线 $BE: y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$ 上,

$$\therefore -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3} = 6,$$

$$\therefore x = -8,$$

$$\therefore Q(-8, 6),$$

②当 BQ 为边时,

$\therefore AQ$ 与 BP 互相平分,

$$\text{设 } Q\left(n, -\frac{1}{3}n + \frac{10}{3}\right),$$

$$\therefore \frac{1}{2}\left[6 + \left(-\frac{1}{3}n + \frac{10}{3}\right)\right] = 0,$$

$$\therefore n = 28,$$

$$\therefore Q(28, -6),$$

即: 直线 BE 上是存在点 Q , 能使以 A, B, P, Q 为顶点的四边形是平行四边形, 点 $Q(-8, 6)$ 或 $(28, -6)$.

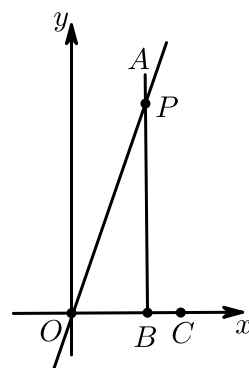
【标注】【知识点】平行四边形的存在性

【重点强调】

这部分题目需要利用平行四边形对边平行且相等的性质进行求解，分类讨论已知线段为边或对角线。

练习3

8. 已知，如图，平面直角坐标系 xOy 中，线段 $AB \parallel y$ 轴，点 B 在 x 轴正半轴上，点 A 在第一象限， $AB = 10$ ．点 P 是线段 AB 上的一动点，当点 P 在线段 AB 上从点 A 向点 B 开始运动时，点 B 同时在 x 轴上从点 $C(4, 0)$ 向点 O 运动，点 P 、点 B 运动的速度都是每秒1个单位，设运动的时间为 $t(0 < t < 4)$ ．



- (1) 用含有 t 的式子表示点 P 的坐标．
- (2) 当点 P 恰好在直线 $y = 3x$ 上时，求线段 AP 的长．
- (3) 求点 P 运动路径的函数解析式，并写出自变量的取值范围．
- (4) 在(2)的条件下，直角坐标平面内是否存在点 D ，使以 O 、 P 、 A 、 D 为顶点的四边形是平行四边形．如果存在，请直接写出点 D 的坐标．如果不存在，请说明理由．

【答案】(1) $P(4 - t, 10 - t)$ ，

(2) $AP = 1$ ．

(3) $y = x + 6(0 < x < 4)$ ．

(4) $D_1(0, -1)$ ， $D_2(0, 1)$ ， $D_3(6, 19)$ ．

【解析】(1) 根据题意得， $BP = AB - AP = 10 - t$ ， $OB = OC - BC = 4 - t$ ，

$$\therefore P(4 - t, 10 - t)，$$

(2) 由(1)得 $P(4 - t, 10 - t)$ ，

$$\therefore \text{将 } P(4 - t, 10 - t) \text{ 代入 } y = 3x，\text{ 得 } t = 1，$$

$$\therefore AP = 1．$$

(3) $P(4 - t, 10 - t)$ ，

$$y = (4 - t) + m = 10 - t,$$

$$\therefore m = 6,$$

$$\therefore y = x + 6 (0 < x < 4).$$

(4) $\because$ 以 O 、 P 、 A 、 D 为顶点的四边形为平行四边形,

$$AP = 1,$$

当 AP 为边时, $AP \parallel OD$,

$$\therefore CD = 1,$$

$$\therefore D_1(0, -1) \text{ 或 } D_2(0, 1),$$

当 AP 为对角线时, 设 AP 中点为 N .

$$\because A(3, 10), P(3, 9),$$

$$\therefore N\left(3, \frac{19}{2}\right).$$

$$\because O(0, 0),$$

$$\therefore D_3(6, 19).$$

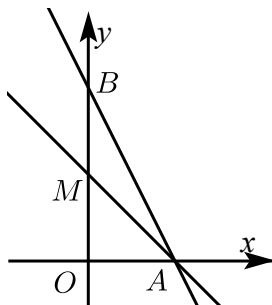
综上所述 $D_1(0, -1)$, $D_2(0, 1)$, $D_3(6, 19)$.

【标注】【知识点】一次函数与动点问题

🔴 特殊四边形存在性

|| 例题4

9. 如图, 在平面直角坐标系中, 函数 $y = -2x + 12$ 的图象分别交 x 轴、 y 轴于 A 、 B 两点, 过点 A 的直线交 y 正半轴于点 M , 且点 M 为线段 OB 的中点.



(1) 求直线 AM 的函数解析式.

(2) 试在直线 AM 上找一点 P , 使得 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle AOM}$, 请直接写出点 P 的坐标.

(3) 点 C 在直线 AM 上, 在坐标平面内是否存在点 D , 使以 A 、 O 、 C 、 D 为顶点的四边形是正方形? 若存在, 请直接写出点 D 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = -x + 6$.

(2) 点 P 的坐标为 $(0, 6)$ 或 $(12, -6)$.

(3) 点 D 的坐标为 $(6, 6)$ 或 $(3, -3)$.

【解析】(1) $\because$ 直线 AB 的函数解析式 $y = -2x + 12$,

$\therefore A(6, 0)$, $B(0, 12)$.

又 $\because M$ 为线段 OB 的中点 ,

$\therefore M(0, 6)$.

设直线 AM 的解析式为 : $y = kx + b$, 则

$$\begin{cases} 6k + b = 0 \\ b = 6 \end{cases} ,$$

$$\text{解得 : } \begin{cases} k = -1 \\ b = 6 \end{cases} ,$$

故直线 AM 的解析式 $y = -x + 6$.

(2) 设点 P 的坐标为 : $(x, -x + 6)$,

$$\therefore AP = \sqrt{(x-6)^2 + (-x+6)^2} = \sqrt{2}|x-6| ,$$

过点 B 作 $BH \perp AM$ 于点 H ,

$\because OA = OM$, $\angle AOM = 90^\circ$,

$\therefore \angle AMO = 45^\circ$,

$\therefore \angle BMH = 45^\circ$,

$$\therefore BH = BM \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} ,$$

$\because S_{\triangle ABM} = S_{\triangle AOM}$,

$$S_{\triangle AOM} = \frac{1}{2} OA \cdot OM = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18 ,$$

$$S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} AP \cdot BH = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}|x-6| \times 3\sqrt{2} ,$$

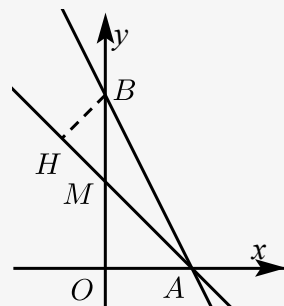
$$\therefore \frac{1}{2} \times \sqrt{2}|x-6| \times 3\sqrt{2} = 18 ,$$

解得 : $x = 0$ 或 12 ,

故点 P 的坐标为 : $(0, 6)$ 或 $(12, -6)$.

(3) 当 OA 是正方形的一条边 , 以 A 、 O 、 C 、 D 为顶点的四边形是正方形时 , 点 C 的坐标为 $(0, 6)$, 点 D 的坐标为 $(6, 6)$;

当 OA 是正方形的一条对角线 , 以 A 、 O 、 C 、 D 为顶点的四边形是正方形时 , 点 C 的坐标为 $(3, 3)$, 点 D 的坐标为 $(3, -3)$.

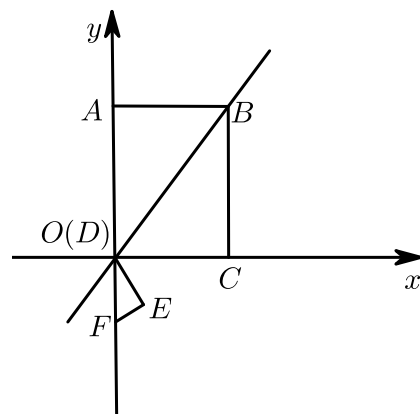


【标注】【知识点】一次函数与面积

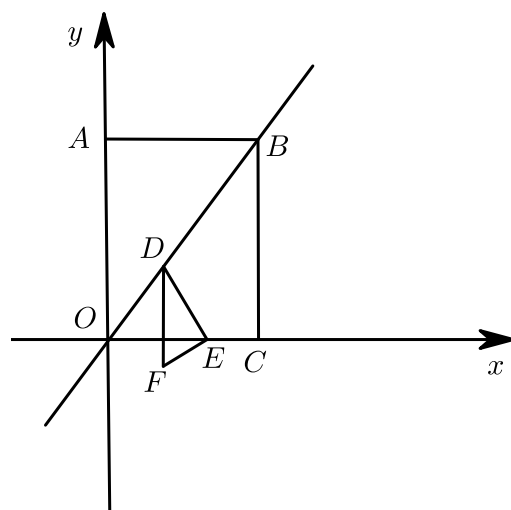
练习4

10. 已知 , 如图 , 在矩形 $OABC$ 中 , $OA = 12$, $OC = 9$, 以 O 为坐标原点 , OC 所在直线为 x 轴 , 建立平面直角坐标系. $\text{Rt}\triangle DEF$ 中 , 点 D 与点 O 重合 , $\angle DEF = 90^\circ$, $DF = \frac{25}{4}$, $DE = 5$,

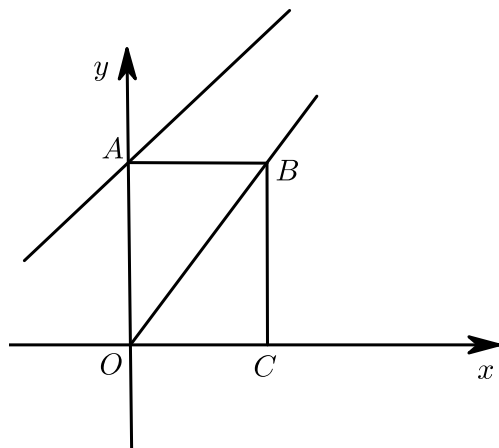
$$\angle AOB = \angle FOE.$$



- (1) 直线 OB 的解析式为 _____ ；上图中点 E 的坐标是 _____ ．
- (2) 如图，若将 $\triangle DEF$ 沿着射线 OB 方向平移，设平移的距离为 k ，当点 E 恰好平移到线段 OC 上时，直接写出平移到距离 $k =$ _____ ．



- (3) 在 (2) 问情况下，即当点 E 平移到线段 OC 上时，是否存在直线 OB 上的点 M 和线段 BC 上的点 N ，使以 D, E, M, N 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，求出点 M 的坐标，若不存在，说明理由．
- (4) 如图，直线 $AK: y = x + b$ 经过点 A ，如果点 P 在 y 轴上，且位于点 A 的下方，点 G 在直线 AK 上，是否存在射线 OB 上点 Q ，使得以 A, P, Q, G 为顶点的四边形是菱形？若存在，请求出点 Q 的横坐标；若不存在，请简要说明理由．



【答案】(1) $y = \frac{4}{3}x$; $E(3, -4)$

(2) 5

(3) 存在, 当 $M(6, 8)$ 时, N 坐标为 $(9, 4)$, 当 $M(0, 0)$ 时, N 坐标为 $(9, 4)$.

(4) 存在, $\frac{108\sqrt{2} - 36}{17}$ 或 $\frac{36}{7}$.

【解析】(1) 略.

(2) 略.

(3) 略.

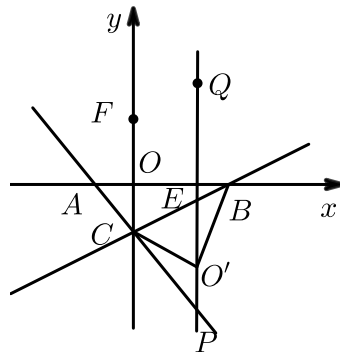
(4) 略.

【标注】【知识点】菱形的存在性; 平行四边形的存在性; 根据条件写一次函数解析式

独步天下

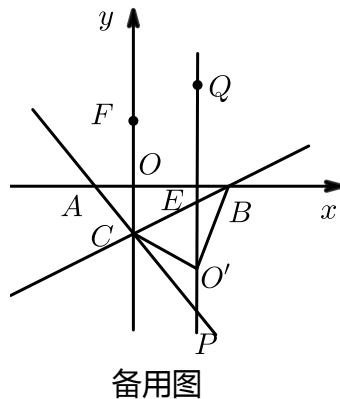
注意: 此题涉及到胡不归问题, 老师们慎用

11. 如图, 已知直线 $l_{AC}: y = -\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ 与 x 轴, y 轴的交点分别为点 A , C , 直线 $BC \perp AC$ 交 x 于点 B .



(1) 求点 B 的坐标及直线 BC 的解析式.

- (2) 将 $\triangle OBC$ 沿 BC 边翻折, 得到 $\triangle O'BC$, 过点 O' 作直线 $O'E$ 垂直 x 轴于点 E , F 是 y 轴上一点, P 是直线 $O'E$ 上任意一点, P, Q 两点关于 x 轴对称, 当 $|PA - PC|$ 最大时, 求点 P 的坐标; 并求 $QF + \frac{1}{2}FC$ 的最小值.
- (3) 若 M 是直线 $O'E$ 上一点, 且 $QM = 3\sqrt{3}$, 在(2)的条件下, 在平面直角坐标系中, 是否存在点 N , 使得以 Q, F, M, N 四点为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 请求出点 N 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

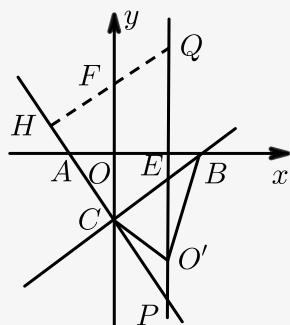


- 【答案】** (1) $B(6, 0)$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3}$,
 (2) $P(3, -5\sqrt{3})$, $5\sqrt{3}$.
 (3) 存在, $(6, 9\sqrt{3})$ 或 $(0, 7\sqrt{3})$ 或 $(0, \sqrt{3})$.

- 【解析】** (1) 由题意 $A(-2, 0)$, $C(0, -2\sqrt{3})$,
 $\therefore$ 直线 $l_{AC}: y = -\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$, $BC \perp AC$,
 $\therefore$ 线 BC 的解析式为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3}$,
 令 $y = 0$, 解得 $x = 6$,
 $\therefore B(6, 0)$.
 故答案为: $B(6, 0)$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3}$.
 (2) $\therefore \triangle OBC$ 关于 BC 边翻折, 得到 $\triangle O'BC$,
 $\therefore$ 可得 $O'(3, -3\sqrt{3})$,
 当 $|PA - PC|$ 最大时, 点 P 在直线 AC 上,
 此时 $P(3, -5\sqrt{3})$,
 $\therefore P, Q$ 关于 x 轴对称,
 $\therefore Q(3, 5\sqrt{3})$,
 在 $Rt\triangle AOC$ 中,
 $\therefore \tan \angle ACO = \frac{AO}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\therefore \angle ACO = 30^\circ,$$

如图，作 $QH \perp AC$ 于 H ，交 y 轴于 F 。



$$\text{则 } FH = \frac{1}{2}CF,$$

根据垂线段最短可知， $QF + \frac{1}{2}FC$ 的最小值为线段 HQ 的长，

在 $\text{Rt}\triangle PQH$ 中，

$$\because \angle HPQ = \angle ACO = 30^\circ, PQ = 10\sqrt{3},$$

$$\therefore HQ = \frac{1}{2}PQ = 5\sqrt{3}$$

$$\therefore QF + \frac{1}{2}FC \text{ 的最小值为 } 5\sqrt{3}.$$

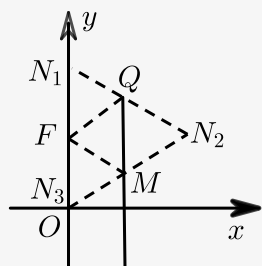
故答案为： $P(3, -5\sqrt{3})$ ， $5\sqrt{3}$ 。

(3) 由(2)可知： $F(0, 4\sqrt{3})$ ，

$$\because QM = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore M(3, 2\sqrt{3}) \text{ 或 } (3, 8\sqrt{3}),$$

当 $M(3, 2\sqrt{3})$ 时，如图，



以 Q 、 F 、 M 、 N 四点为顶点的四边形是平行四边形，

可得满足条件的点 N 坐标为 $(6, 3\sqrt{3})$ 或 $(0, \sqrt{3})$ 或 $(0, 7\sqrt{3})$ ，

当 M 为 $(3, 8\sqrt{3})$ 时，同法可得满足条件的点 N 坐标为 $(6, 9\sqrt{3})$ 或 $(0, 7\sqrt{3})$ 或 $(0, \sqrt{3})$ 。

【标注】【知识点】平行四边形的存在性